



Isaac Newton

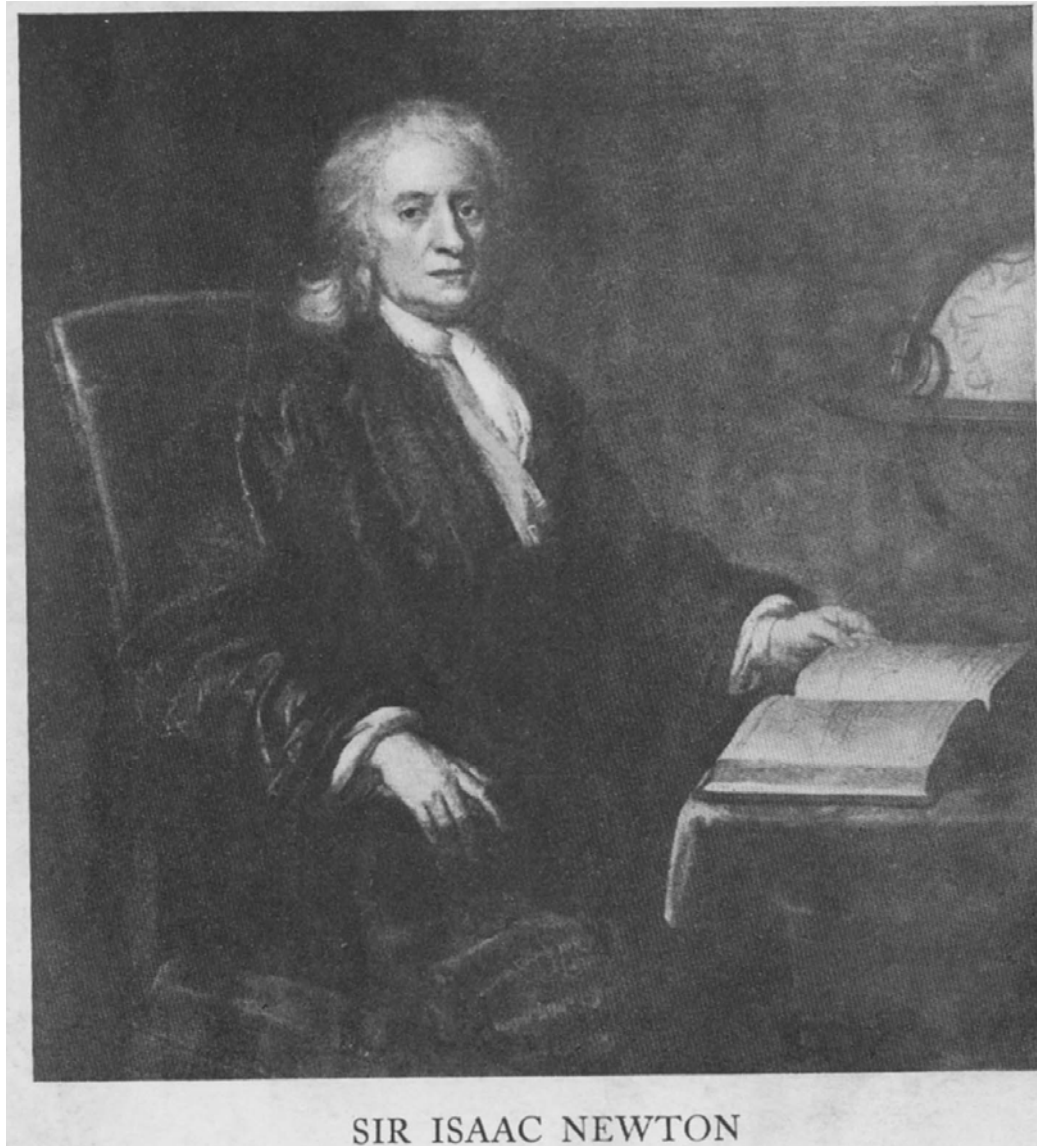
Problemstellung

Theorie

Beispiel

Aufgabe

Newton Verfahren





Gliederung

Isaac Newton

Problemstellung

Theorie

Beispiel

Aufgabe

1. Sir Isaac Newton
2. Problemstellung
3. Theorie
4. Beispiel
5. Aufgaben



Sir Isaac Newton

Isaac Newton

Problemstellung

Theorie

Beispiel

Aufgabe

- 4. Januar 1643 geboren
- 20./21. März 1727 gestorben
- Mitglied der Royal Society
- „De analysi per aequationes numero terminorum infinitas“



Isaac Newton

Problemstellung

Theorie

Beispiel

Aufgabe

Problemstellung

- Nullstellen für $f(x)=x^3-8$ einfach zu bestimmen
- Kompliziert aber für $f(x)=\sin(x-1)-x$
- Nur näherungsweise bestimmbar
- regula falsi zu langwierig
- Besser Newtonsches Nährungsverfahren



Isaac Newton

Problemstellung

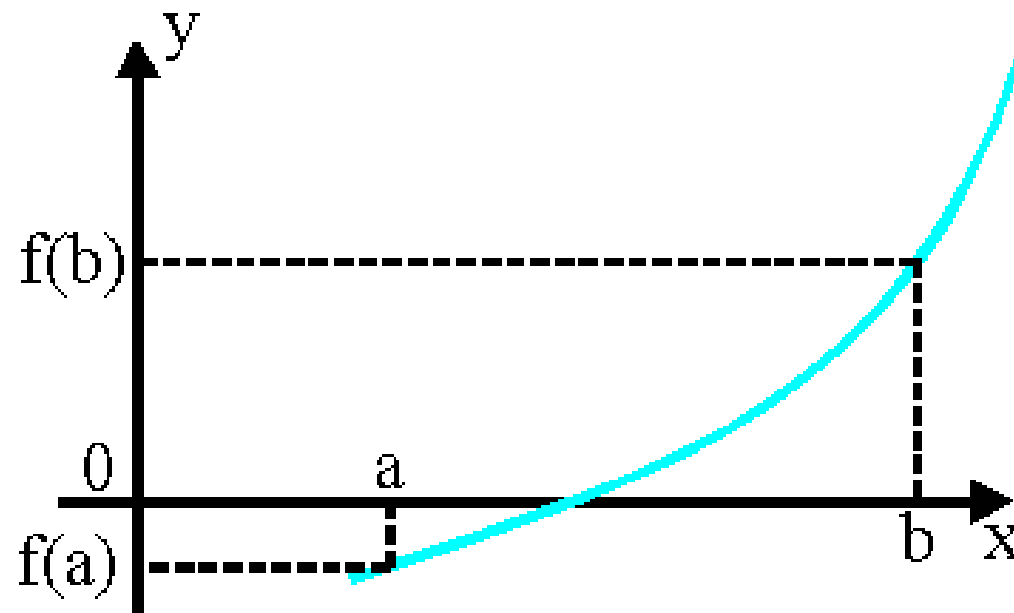
Theorie

Beispiel

Aufgabe

Theorie

- $f(x)$ in $[a,b]$ stetig
- Vorzeichenwechsel im Intervall $f(a)$ bis $f(b)$





Isaac Newton

Problemstellung

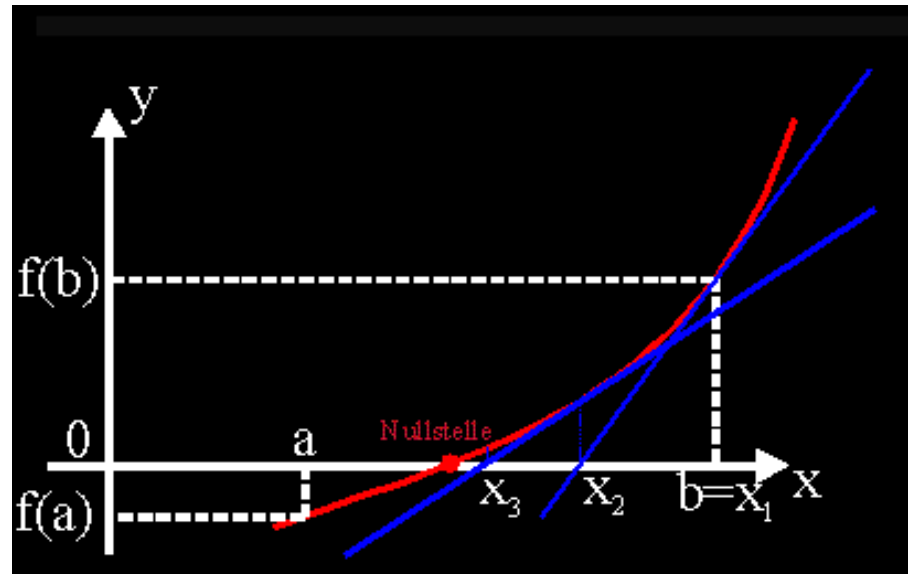
Theorie

Beispiel

Aufgabe

Theorie

- $P(a/f(a))$ oder $P(b/f(b)) \triangleq P(x_1/f(x_1))$
- In P wird y_t ermittelt und dann x_2 mit ihrem Schnittpunkt mit der x -Achse berechnet
- Wird n Mal wiederholt, bis Nullstelle ziemlich genau ermittelt





Isaac Newton

Problemstellung

Theorie

Beispiel

Aufgabe

Theorie

Tangentengleichung: $y = f'(x_1) \cdot (x - x_1) + f(x_1)$

$$0 = f'(x_1) \cdot x - f'(x_1) \cdot x_1 + f(x_1)$$

$$f'(x_1) \cdot x = f'(x_1) \cdot x_1 - f(x_1)$$

$$x = \frac{f'(x_1) \cdot x_1 - f(x_1)}{f'(x_1)} \Rightarrow x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

Iterationsvorschrift für das Newtonsche Näherungsverfahren

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$



Isaac Newton

Problemstellung

Theorie

Beispiel

Aufgabe

Theorie

ACHTUNG!!!

$$f'(x) \neq 0$$

Mehrere Nullstellen → mehrere Startwerte suchen



Isaac Newton

Problemstellung

Theorie

Beispiel

Aufgabe

Beispiel

$$f(x) = x^3 + x + 1$$

1. Startwert festlegen:
Wertetabelle anlegen

x	-2	-1	0	1	2
f(x)	-9	-1	1	3	11

2. Formelsammlung:

$$f(x) = x^3 + x + 1 \quad f'(x) = 3x^2 + 1$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

3. Näherungsrechnung:

n	x_n	$f(x_n)$
0	-0,5	0,375
1	-0,71	-0,068
2	-0,682969	-0,0015
3	-0,682328	-0,0000047
4	-0,6823278	-0,0000000002

$$x \approx -0,682328$$



Beispiel

Berechnen Sie $x = \sqrt[5]{2}$ auf 5 Kommastellen genau.

$$x = \sqrt[5]{2}$$

$$x^5 = 2$$

$$f(x) = x^5 - 2$$

$$f'(x) = 5x^4$$

Wahl des Startwertes:

x	0	1	2
f(x)	-2	-1	30

$$x_0 = 1,2$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^5 - 2}{5x_n^4}$$

Nährungsrechnung:

n	x_n	$F(x_n)$
0	1,2	0,488
1	1,152901	0,037
2	1,148729	0,00027
3	1,148698357	$2 \cdot 10^{-8}$
4	1,148698357	/

$$\sqrt[5]{2} \approx 1,148698355$$

Isaac Newton

Problemstellung

Theorie

Beispiel

Aufgabe



Isaac Newton

Problemstellung

Theorie

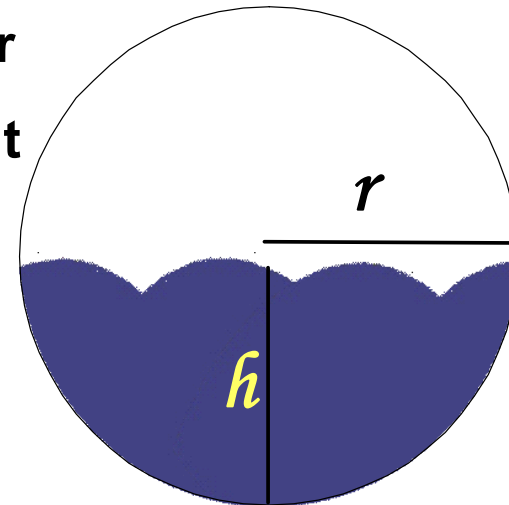
Beispiel

Aufgabe

Aufgaben

1. Bestimme eine Nullstelle der Funktion $f(x)=\sin(x-1)-x$
2. Auf einem Stahlgerüst steht ein kugelförmiger Wasserbehälter mit einem Innendurchmesser von 10m. Aus Gründen der Tragfähigkeit des Gerüsts dürfen höchstens 471000 l Wasser eingefüllt werden. Berechnen Sie, bis zu welcher Höhe

über Grund das Wasser bei Maxmalfüllung steht





Aufgaben - Lösung

Aufgabe 1

$$f'(x) = 1 \cdot \cos(x_n - 1) - 1$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{\sin(x_n - 1) - x_n}{\cos(x_n - 1) - 1}$$

Startwert: $x = -1$

x	-1	0	1
f(x)	0,090	-0,84	-1

n	x_n	$f(x_n)$
0	-1	0,090702573
1	-0,935951152	0,001882667
2	-0,934563874	$8,98985 \cdot 10^{-7}$
3	-0,934563211	$2,05391 \cdot 10^{-13}$

$$x \approx -0,934563211$$

Isaac Newton

Problemstellung

Theorie

Beispiel

Aufgabe



Aufgaben - Lösung

Aufgabe 2

$$V = \frac{\pi}{3} h^2 \cdot (3r - h)$$

$$471 = \frac{\pi}{3} h^2 \cdot (15 - h)$$

$$\pi = 3,14$$

$$\longrightarrow h^3 - 15h^2 + 450 = 0$$

x	0	5	10
f(x)	450	200	-50

n	x_n	$f(x_n)$
0	9	-36
1	7,667	18,9
2	8,020	1,04
3	8,0419	0,005
4	8,0420	/

$$x \approx 8,04$$

Isaac Newton

Problemstellung

Theorie

Beispiel

Aufgabe



Isaac Newton

Problemstellung

Theorie

Beispiel

Aufgabe

Quellen

- Lambacher Schweizer Analysis Leistungskurs
- Mathematik 11
- Das große Tafelwerk